

2- إذا كان I مثالي في A فإن حيز الخا A/I عديم القوى البرهات:

1- لدينا سابقاً أن $\forall n \in \mathbb{N}^*$ فإن $C^n I \subseteq C^n A$

فقط بما أن A عديم القوى فإن يوجد

$$C^n I \subseteq C^n A = 0$$

فذلك المثالي I عديم القوى.

2- لنفرض أن $C^n A = 0$ لنأخذ تلك قابلية عامر

$$\pi: A \rightarrow A/I$$

$$\pi a = a + I \quad \forall a \in A$$

$$C^n(A/I) = C^n(\pi A)$$

$$= \pi(C^n A) = \pi(0) = I$$

فذلك فإن A/I عديم القوى.

حيز له ذهب البسطة

تعريف: ليكن A حيز له موقف R

نسمي أكبر مثالي في A قابلاً للباساس (حيز) الحيز A

و نرمز له $\text{Rad}(A)$ أو $J(A)$

ونسمي الحيز A تبليي إذا كان $[A, A] = 0$

نقول عن المثالي I في A أنه تبليي إذا كان $[I, I] = 0$

* تعريف:

نقول عن حيز له A موقف R أنه ذهب بسطة إذا كان

لك مثالي $A \neq I$ تبليي هو هيز «أولاً يحوي مثاليه

تبليي B بحيث $B \neq A$ »

تقريب:

لنعتبر لي سياري الصفح هو صفح بسيط.

ملاحظات:

ليكن A غير لي موقت الحلقات R ، الشرط لا يأتي متكافئ:

- 1- A صفح بسيط.
- 2- A لا يحوي مثالبات قابلية للصفحة لا صفح.
- 3- $J(A) = \{0\}$

البرهان:

[1] \Leftarrow [2]

بفرض A صفح بسيط وليكن B مثالي قابل للصفحة في A
 وليكن n أصغر عدد صحيح من أجل $D^n B = 0$

$$g = D^n B = [D^{n-1} B, D^{n-1} B]$$

وأن $D^{n-1} B \neq 0$ وهذا يناقض كون A صفح بسيطاً لأن
 $B = 0$

[2] \Leftarrow [1]

ليكن $K \neq A$ مثالي تبيلي في A ، عندها:
 $[K, K] = 0 \Rightarrow D^* K = 0$

وحسب الفرض فإن $K = 0$ [2] \Leftarrow [3] والوحسب التعريف[3] \Leftarrow [2] ليكن L مثالي قابل للصفحة في A وحسب تعريف $J(A)$ فإن $J(A) \subseteq L \Leftarrow L = 0$

ملاحظات:

ليكن A غير لي صفح موقت الحلقات R عندها

فإن حسب الخارج $\frac{A}{J(A)}$ صفح بسيط.

البرهان
ليكن $\frac{K}{J(A)}$ صالحاً في $\frac{A}{J(A)}$ قابل للد حيث

كما ان A كوي $J(A)$
وحيث ان K قابل للد في A

$$J(A) \subseteq K \subseteq J(A)$$

$$K = J(A) \text{ ومنه}$$

$$\frac{K}{J(A)} = \frac{J(A)}{J(A)} = 1 \text{ ومنه فان}$$

$$\frac{A}{J(A)} \text{ ديفت سيد حيث}$$

* تمهيد:
ليكن A غير لي فوق حلقه A و B قابل للد في A
اذا كان A/B غير الخرج ديفت سيد عنده
 $B = J(A)$

البرهان:
لنفرض ان B صالح في A قابل للد ومنه فان
 $B \subseteq B + J(A)$ وبما ان $A \subseteq B + J(A)$
فان $B + J(A) \subseteq B$ غير خارج مصدق وموافقاً قابل للد
وان $\frac{B + J(A)}{B} \subseteq \frac{A}{B}$ صالح في $\frac{A}{B}$

وبما ان A/B ديفت سيد فلا ممزناً فان $B + J(A) = B$
ومنه فان $B + J(A) = B$ وبالتالي
 $B = J(A) \Leftrightarrow J(A) \subseteq B \subseteq J(A)$

البرهان قابل للد
قابل للد

عالم

تعرّف: ليكن $f: A \rightarrow A'$ تناك حيوري لـ R و B متالي
قابل للحل في A ، عندها فإن $f(B)$ متالي قابل للحل في A'

الدلي:

ان B متالي في A وتكون تناك حيوري لـ $f(B)$ متالي في A'

بما ان B متالي في A و f تناك حيوري لـ R و R متالي في A
 $f(B)$ متالي في A'

ليكن $a \in A'$ ونزف على ان

$$d_a(f(B)) \subseteq f(B)$$

ليكن $y \in d_a(f(B))$ عندها

$$y = d_a(x) \quad x \in f(B)$$

$$\Rightarrow x = f(z) \quad z \in B$$

$$y = d_a(x) = [a, x] = [a, f(z)]$$

وبما ان f تناك حيوري لـ R و R متالي في A و $a \in A'$

$$y = d_a(x) = [f(b), f(z)]$$

$$= f([b, z]) \in f(B)$$

$$\Rightarrow d_a(f(B)) \subseteq f(B)$$

فإن $f(B)$ متالي في A'

لنفرض ان B قابل للحل عندها يوجد $n \in \mathbb{N}$ حيث

$$D^n B = 0$$

$$0 = f(D^n B) = f([D^{n-1} B, D^{n-1} B])$$

$$= [f(D^{n-1} B), f(D^{n-1} B)]$$

$$= [D^{n-1} f(B), D^{n-1} f(B)]$$

$$= D^n f(B) = 0$$

$f(B)$ قابل للحل في A' فثبت \Leftarrow